数理解析研究所講究録
394巻 1980年 150-179

McKay Observation 補遺

東大・理　　岩堀長慶

§1. 問題の設定

群論六甲シンポジュウム（1980年3月）の報告集の中で McKay Observation について紹介した（[3] 参照）が，Ford-McKay の preprint [1] について，Happel-Preiser-Ringel [2] により，[1] の一種の一般化が与えられた。[2] の結果を少し別の方法で以下に紹介したい。（筆者の見地ではその方がよりわかり易いと思われる。また [2] では以下の表現体の条件が一寸不充分な形で述べられている点も茲で訂正しておきたい。）

[2] で扱っている問題を述べるために一つの定義から始めよう。

定義 有限群 G に対して，体 k が次の条件 (i), (ii) を満たす時，k は G の（2次の）表現体であるという：

(i) G の k 上の群環 kG は半単純である。（すなわ

ち体 k の標数 char k は群 G の位数 $|G|$ の約数ではない。)

(ii) G は k 上に2次の自己反傾的な忠実表現 ρ をもつ。

このとき次のような問題 I, II, III が [2] で解かれている：(以下表現体といえば2次の表現体の意とする。)

問題 I. 表現体をもつような有限群を決定せよ。

問題 II. 有限群 G に対し，その表現体を決定せよ。

問題 III. 有限群 G が体 k を表現体にもつとし，ρ を G の k 上の2次の自己反傾的な忠実表現とする。このとき [1] と同様に，表現 ρ の定める群 G の体 k 上の表現グラフ Γ が定義されるが，表現グラフとしてどのようなものが出現するか？

以下の小文で I は [2] と別な方法で解決する。II は [2] の不充分な結果（十分条件のみが与えられていて，必要条件が考慮されていない）を精密化して，k が G の表現体となるための必要十分条件を与える。III は，本質的には [2] と同様だが，非負実行列に関する Perron-Frobenius の理論を応用して，若干見通しのよい（と思われる）形で表現グラフの決定を行なう。

§2. 多面体群 (polyhedral group) と二項多面体群

表現体をもつような有限群を記述するために必要な用語と記号を茲で準備しておこう。

(a) 位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}_n$ と書く。

(b) 生成元 P, Q, R と基本関係

$$P^l = Q^m = R^n = PQR = 1$$

で与えられる群を (l, m, n) と書き，これを型 l, m, n の<u>多面体群</u>(polyhedral group)という。ただし l, m, n は自然数で，$1 < l \leqq m \leqq n$ とする。このとき次の事実が昔から知られている(Coxeter-Moser[4], p.67参照)：

<u>定理 2.1.</u> 群 (l, m, n) が有限群 $\Longleftrightarrow \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$

このような l, m, n の値と，その時の群 (l, m, n) は次の表の通りである：

$(2, 2, n) \cong \mathfrak{D}_{2n}$ (位数 $2n$ の dihedral group)

$(2, 3, 3) \cong \mathfrak{A}_4$ (4次交代群) 正四面体群

$(2, 3, 4) \cong \mathfrak{S}_4$ (4次対称群) 正八面体群

$(2, 3, 5) \cong \mathfrak{A}_5$ (5次交代群) 正廿面体群

(c) 生成元 P, Q, R と基本関係

$$P^l = Q^m = R^n = PQR$$

で与えられる群を $\langle l, m, n \rangle$ と書き，これを型 l, m, n の<u>二項多面体群</u>(binary polyhedral group)という。ただし l, m, n は自然数で $1 < l \leqq m \leqq n$ とする。従っ

て，$\langle l, m, n\rangle$ から (l, m, n) 上への自然な準同型写像 φ が定まり，$\mathrm{Ker}\,\varphi=\langle Z\rangle$，但し $Z=PQR$，である。

<u>定理 2. 2</u>　$\langle l, m, n\rangle$ が有限群となるための必要十分条件は (l, m, n) が有限群となることである。このとき Z は $\langle l, m, n\rangle$ の中心に属し，しかも Z の位数は2である。（[4], p.68 参照）

$\langle 2, 2, n\rangle$ を binary dihedral group 又は ~~binary~~ dicyclic group という。$\langle 2, 3, 3\rangle$，$\langle 2, 3, 4\rangle$，$\langle 2, 3, 5\rangle$ は夫々 binary tetrahedral group, binary octahedral group, binary icosahedral group と呼ばれている。位数および交換子群 G' による商群の構造は次表の通りである。

$G=\langle 2,\ 2,\ n\rangle \qquad |G|=4n,$

$$n=\text{偶数} \Rightarrow G/G' \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

$$n=\text{奇数} \Rightarrow G/G' \cong \mathbb{Z}_4$$

$G=\langle 2,\ 3,\ 3\rangle\ (\cong SL(2,\mathbb{F}_3)),\ |G|=24$

$$G/G' \cong \mathbb{Z}_3$$

$G=\langle 2,\ 3,\ 4\rangle,\ |G|=48$

$$G/G' \cong \mathbb{Z}_2$$

$G=\langle 2,\ 3,\ 5\rangle,\ (\cong SL(2,\mathbb{F}_5)),\ |G|=120$

$$G/G' \cong \mathbb{Z}_1$$

§3. 表現体をもつような有限群の決定

定理 3.1. 有限群 G に対し次の3条件(I)〜(III)は互いに同値である。

(I) Gは表現体をもつ。

(II) 複素数体 $\mathbb{C}$ はGの表現体である。

(III) Gは次のどれかと同型である：$\mathbb{Z}_n$, $\mathcal{D}_{2n}$, finite polyhedral group $\langle l, m, n\rangle$.

(証明)(III)⇒(II)は周知である。(例えば[3]参照)。また(II)⇒(I)は明らかである。よって以下に(I)⇒(III)を示そう。体kを有限群Gの表現体とし，ρをGのk上の2次の自己反傾的な忠実表現：$\rho: G \longrightarrow GL(2,k)$とする。$G$と$\rho(G)$を同一視して，$G \subset GL(2,k)$としてよい。表現$\rho$はその反傾表現$\rho^*$と同値だから，$G$の各元$\sigma$は${}^t\sigma^{-1}$と相似である。よって$k$の代数的閉包$\bar{k}$中に$\sigma$の固有値$\alpha, \beta$をとれば，$\{\alpha, \beta\}$は${}^t\sigma^{-1}$の固有値$\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\}$と一視する。よって

$$\alpha = \alpha^{-1}, \quad \beta = \beta^{-1}$$

又は

$$\alpha = \beta^{-1}, \quad \beta = \alpha^{-1}$$

の少くも一方が起る。よって$\alpha\beta = \pm 1$，すなわち$det(\sigma) = \pm 1$だから，Gは$GL(2,k)$の部分群

$$SL^{\pm}(2,k) = \{\tau \in GL(2,k) \mid det(\tau) = \pm 1\}$$

に含まれる。さて場合を二つにわけて考えよう。

<u>Case 1.</u> $G \not\subset SL(2,k)$ の時。(従って char $k \neq 2$)

$H = G \cap SL(2,k)$ とおくと $[G:H]=2$ となる。$G-H \ni \sigma \Rightarrow \sigma^2 = 1$ が成り立つ。(実際，σ の固有値 α，β は $\alpha\beta = -1$ を満たすから，上記により $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ である。$\therefore \alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$. よって σ の Jordan 標準形は $\sigma \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\therefore \sigma^2 = 1$)。次に $G-H \ni \sigma$, $H \ni h \Rightarrow$ $\sigma h \sigma^{-1} = h^{-1}$ である。(実際 $\sigma^2 = 1$ かつ $(\sigma h)^2 = 1$ だから。) よって H はアーベル群である。char $k \nmid |H|$ 故，H の各元は $GL(2,\bar{k})$ 中で対角化可能である。しかも H がアーベル群だから，H は $SL(2,\bar{k})$ 中の対角行列全体のなす部分群 $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} \middle| \xi \in \bar{k}^* \right\}$ の或る部分群と共役である。一方 $\Delta \cong \bar{k}^*$ 故，H は巡回群である。いま $H \cong \mathbb{Z}_n$ とすれば $G \cong \mathcal{D}_{2n} = (2,2,n)$ となる。

<u>Case 2.</u> $G \subset SL(2,k)$ の時。

$SL(2,k)$ は $\bar{k}$ 上の 2 次元列ベクトル全体のなすベクトル空間 $\bar{k}^2$ に左から自然に作用する。従って $SL(2,k)$ は，$\bar{k}^2$ 中の 1 次元部分空間の全体のなす集合 $\mathbb{P}_1$ ($\bar{k}$ 上の射影直線) にも作用する。$SL(2,k)$ の中心 $\mathfrak{Z} = \{\pm I\}$ は $\mathbb{P}_1$ に trivial に作用するから，$SL(2,k)/\mathfrak{Z}$ が $\mathbb{P}_1$ に作用する。従って $G \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0$ とおくと，商群 $\bar{G} = G/\mathfrak{Z}_0$ を

$\mathbb{P}_1$ に作用する。茲で場合を二つにわけて考えよう。

<u>Case 2.1.</u> $\bar{G}$ が $\mathbb{P}_1$ 中に共通不動点をもつ場合。

$\bar{k}^2$ 中に $\bar{G}$ 不変な1次元部分空間 $\bar{k}u$ があるのだから，G の下で完全可約な $\bar{k}^2$ 中に ($\because$ char $k \nmid |G|$) もう一つの G 不変な1次元部分空間 $\bar{k}v$ が存在して

$$\bar{k}^2 = \bar{k}u \oplus \bar{k}v$$

となる。よって base u, v で行列表示すれば，G は $SL(2,\bar{k})$ の対角部分群 Δ に含まれる。よって G は巡回群である。

<u>Case 2.2.</u> $\bar{G}$ が $\mathbb{P}_1$ 中に共通不動点をもたぬ場合。

$\bar{G}-\{1\}$ の各元 $\bar{\sigma}$ は $\mathbb{P}_1$ 中に丁度2個の不動点をもつ。何故なら，$\bar{\sigma}$ を与える G の元 σ をとれば，$\bar{\sigma} \neq 1$ により σ はスカラー行列ではない。また σ の Jordan 標準形 ($\bar{k}$ での) は $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ の形ではない。(実際もし $\sigma \sim \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ なら，$N=|G|$ として $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\therefore N\alpha^{n-1}=0$，$\therefore$ char $k \mid N$ となり矛盾。) よって σ の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $\alpha \neq \beta$, の形である。よって σ 不変な $\bar{k}^2$ 中の1次元部分空間は丁度2つである。すなわち $\bar{\sigma}$ は $\mathbb{P}_1$ 中に丁度2個の不動点をもつ。

すると次のことがわかる。(岩堀 [5] 参照)。いま $\bar{G}^{\#} = \bar{G}-\{1\}$ とおき，$\bar{G}^{\#} \ni \bar{\sigma}$ の $\mathbb{P}_1$ 中にもつ不動点の集合を $\mathbb{P}_1^{\bar{\sigma}}$ とおく。そして $\mathbb{P}_1$ の有限部分集合 $\Omega = \bigcup_{\bar{\sigma}\in\bar{G}^{\#}} \mathbb{P}_1^{\bar{\sigma}}$

を考える。すると Ω は3個の $\bar{G}$-orbit $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ に分割される。各 Ω_i から点 p_i を一つとって固定し，p_i の $\bar{G}$ 中の stabilizer を $\bar{G}_i = \{\bar{\sigma} \in \bar{G} \mid \bar{\sigma}(p_i) = p_i\}$ とし，$|\bar{G}_i| = \nu_i$ とおく。$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3$ としてよい。すると Case 2.1 と [5] の結果から，次の場合の何れかが起る。

ν_1	ν_2	ν_3	$\lvert\bar{G}\rvert$	$\bar{G}$
2	2	n	$2n$	$(2, 2, n)$
2	3	3	12	$(2, 3, 3)$
2	3	4	24	$(2, 3, 4)$
2	3	5	60	$(2, 3, 5)$

よって何れの場合にも $|\bar{G}| =$ 偶数 $\therefore |G| =$ 偶数。よって G 中に位数 2 の元 a がある。$\therefore$ char $k \neq 2$ かつ $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる。$\therefore \mathfrak{Z} = \{1, a\} \subset G$ $\therefore \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}$, $\bar{G} = G/\mathfrak{Z}$. このことより容易に G が $\langle 2, 2, n\rangle$, $\langle 2, 3, 3\rangle$, $\langle 2, 3, 4\rangle$, $\langle 2, 3, 5\rangle$ のどれかと同型になることがわかる。（証明終）

§4. 有限群の表現体の決定

体 k が有限群 G の表現体となるための条件を考えよう。$G = \mathbb{Z}_n, \mathcal{D}_{2n}, \langle 2, 2, n\rangle, \langle 2, 3, n\rangle_{3 \leqq n \leqq 5}$ のおのおのの場合にそれぞれ考えよう。

<u>定理 4.1.</u> 体 k が群 $G = \mathbb{Z}_n$ の表現体になるための必要

十分条件は次の通り

$n=1$ ……無条件

$n=2$ … $\mathrm{char}\, k \neq 2$

$n \geqq 3$ … $\mathrm{char}\, k \nmid n$, かつ $\zeta_n + \zeta_n^{-1} \in k$

(但し $\zeta_n \in \bar{k}$ は1の原始 n 乗根)

(証明) $n=1, 2$ は容易にわかる。$n \geqq 3$ の時条件の必要性は容易にわかる。十分性は，$\gamma = \zeta_n + \zeta_n^{-1} \in k$ とし，$G = \langle \sigma \rangle$ とおくと，$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$ が G の2次の自己反傾的な忠実表現を与えるからである。($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}$)

<u>定理 4. 2</u> 体 k が群 $G = \mathfrak{D}_{2n} = (2, 2, n)$ の表現体になるための必要十分条件は

$n = 2$ ……$\mathrm{char}\, k \neq 2$

$n \geqq 3$ ……$\mathrm{char}\, k \nmid 2n$ かつ $\zeta_n + \zeta_n^{-1} \in k$

(証明) $n = 2$ なら $\mathfrak{D}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 故容易。$n \geqq 3$ の時の必要性は容易。十分性は，$G = \langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^n = PQR = 1 \rangle$ とし，$\gamma = \zeta_n + \zeta_n^{-1}$ とおく。表現 ρ を

$\rho(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix}$, $\rho(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho(P) = \rho(Q)\rho(R)$

で定めれば，忠実かつ自己反傾的になる。

<u>定理 4. 3.</u> 体 k が群 $G = \langle 2, 2, n \rangle$ の表現体になるための必要十分条件は $\mathrm{char}\, k \nmid 2n$，$\zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1} \in k$ かつ $x, y \in k$ が存在して $x^2 + y^2 = \gamma^2 - 4$ (但し $\gamma = \zeta_{2n} + \zeta_{2n}^{-1}$) である。

(証明) (必要性) k が $G=\langle 2,2,n\rangle=\langle P_0, Q_0, R_0 \mid P_0^2=Q_0^2=R_0^n=P_0Q_0R_0\rangle$ の表現体であるとし, $\rho: G\to GL(2,k)$ を G の自己反傾的な忠実表現とする。既述により $\rho(G)\subset SL(2,k)$ である。$\rho(P_0)=P$, $\rho(Q_0)=Q$, $\rho(R_0)=R$ とおくと

$$(*) \qquad P^2=Q^2=R^n=PQR=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって P, Q, R の位数は夫々 $4, 4, 2n$ となりその固有値は夫々 1 の原始 $4, 4, 2n$ 乗根である。さて ρ を相似表現でおきかえて $P=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ としてよい。このとき $Q=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおくと, $ad-bc=1$, $a+d=\zeta_4+\zeta_4^{-1}=0$ である。そして $R=-(PQ)^{-1}=-Q^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}b&d\\-a&-c\end{pmatrix}$ であるから, $b-c=\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}\in k$。いま $\gamma=\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}$ とおくと, $b=c+\gamma$ と $a=-d$ と $ad-bc=1$ より

$$-a^2-c(c+\gamma)=1$$

$$\therefore\ a^2+\left(c+\frac{\gamma}{2}\right)^2=-1+\frac{\gamma^2}{4}=\frac{1}{4}(\gamma^2-4)$$

よって, $x=2a$, $y=2\left(c+\frac{\gamma}{2}\right)$ は $x^2+y^2=\gamma^2-4$ を満たす。$\mathrm{char}\, k \nmid |G|$ より $\mathrm{char}\, k \nmid 2n$ である。

(十分性) $x^2+y^2=\gamma^2-4$ の解 $x, y\in k$ から出発して, $2a=x$, $2\left(c-\frac{\gamma}{2}\right)=y$ で a, c を定め, $d=-a$, $b=c+\gamma$ とおけば, 上の計算を逆に辿って $P=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}b&d\\-a&-c\end{pmatrix}$ が $SL(2,k)$ の元で, かつ $(*)$ を満たす。これにより定まる表現 ρ が自己反傾的であることがわかる。ρ が忠実なる

ことを示そう。[redacted]Rの位数が$2n$で，$|G|=4n$より，$\mathrm{Ker}\,\rho$ $=\mathfrak{N}$の位数は高々2である。もし$|\mathfrak{N}|=2$なら$\mathfrak{N}=\langle z_0\rangle$ $(z_0=P_0Q_0R_0)$ $\therefore G/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{D}_{2n}$. 一方$G/\mathfrak{N}\cong\langle R\rangle\cong\mathbb{Z}_{2n}$で矛盾。$\therefore \mathfrak{N}=1$ よってkはGの表現体である。(証明終)

<u>定理4.4.</u> 自然数n, $3\leqslant n\leqslant 5$, に対し，体kが群$G=\langle 2,3,n\rangle$の表現体になる為の必要十分条件は，$\mathrm{char}\,k\nmid 6n$, $\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}\in k$, かつ$x,y\in k$が存在して$x^2+y^2=\gamma^2-3$ (但し$\gamma=\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}$)である。

(証明) 定理4.3とほぼ同様である。(必要性) 群Gの位数を[redacted]考慮すれば$\mathrm{char}\,k\nmid 6n$が出る。$G=\langle P_0,Q_0,R_0\mid P_0^2=Q_0^3=R_0^n=P_0Q_0R_0\rangle$とし，$G$の自己反傾的な忠実表現$\rho: G\longrightarrow GL(2,k)$をとり，$\rho(P_0)=P$, $\rho(Q_0)=Q$, $\rho(R_0)=R$とおくと，自己反傾性から$P,Q,R\in SL(2,k)$で

$$(**)\qquad P^2=Q^3=R^n=PQR=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

となる。ρを相似表現でおきかえて$P=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$としてよい。このとき$Q=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $ad-bc=1$とすると，上記と同様に$R=\begin{pmatrix}b&d\\-a&-c\end{pmatrix}$となる。$a+d=\zeta_6+\zeta_6^{-1}=1$, $b-c=\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}$ $\therefore \zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}\in k$. いま$\zeta_{2n}+\zeta_{2n}^{-1}=\gamma$とおくと，$d=1-a$と$b=c+\gamma$と$ad-bc=1$より

$$-a^2+a-c(c+\gamma)=1$$

$$\therefore (a-\tfrac{1}{2})^2+(c+\tfrac{\gamma}{2})^2=-1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{\gamma^2}{4}=\frac{\gamma^2-3}{4}$$

よって $x=2(a-\frac{1}{2})$, $y=2(c+\frac{\gamma}{2})$ が $x^2+y^2=\gamma^2-3$ を満たす。

（十分性）定理4.3の場合と同様に，x, y から出発して (**) の解 $P, Q, R \in SL(2,k)$ が作れ，自己反傾的な表現 $\rho: P_0 \to P,\ Q_0 \to Q,\ R_0 \to R$ が得られる。$SL(2,k)$ の部分群 $G_1=\langle P,Q,R\rangle$ は k を表現体にもつ。しかも (**) から G_1 はアーベル群でない。（$P=QR$ の位数を比べて，もし G_1 がアーベル群なら $4=\frac{6\cdot 2n}{(6,2n)}\geq 6$ という式が出る。これは矛盾である。）一方，$\mathrm{Ker}\,\rho=\mathcal{N}$ とおくと，"$\mathcal{N}\neq 1$ なら $|\mathcal{N}|=$ 偶数" が容易にわかる．よって $z_0=P_0Q_0R_0$ は $\in\mathcal{N}$. よって $G_1\cong G/\mathcal{N}$ は $G/\langle z_0\rangle=(2,3,n)$ の商群である。しかも G_1 中に位数2の中心元 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ がある。これは $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ のどの商群に対しても不可能である。よって $\mathcal{N}=1$，すなわち ρ は忠実表現となり，k は G の表現体である。（証明終）

<u>定理 4.5.</u> 有限体 $k=\mathbb{F}_q$ ($q=p^e$: p は素数) が

$G=\mathbb{Z}_n$ の表現体 $\Leftrightarrow$ $q\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}.\ n)$

$G=\mathfrak{D}_{2n}$ の表現体 $\Leftrightarrow$ $q\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}.\ n)$, $p>2$

$G=\langle 2,2,n\rangle$ の表現体 $\Longleftrightarrow$ $q\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}.\ 2n)$

$G=\langle 2,3,n\rangle$ の表現体 $\Longleftrightarrow$ $q\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}.\ 2n)$, $p>3$

（証明）よく知られているように，有限体 k の任意の元 α は $\alpha=x^2+y^2$ ($x\in k$, $y\in k$) の形に書ける。よって定理

4.3, 4.4 の最後の条件は不要である。条件 $\zeta_m+\zeta_m^{-1}\in k$ は，$(\zeta_m+\zeta_m^{-1})^q=\zeta_m+\zeta_m^{-1}$ に同値である。すなわち，

$$\zeta_m+\zeta_m^{-1}\in k \iff \zeta_m^{q}+\zeta_m^{-q}=\zeta_m+\zeta_m^{-1}$$

である。さて，$\zeta_m+\zeta_m^{-1}=\gamma$ とおくと，上の条件は $\zeta_m^{q}, \zeta_m^{-q}$ 及び ζ_m, ζ_m^{-1} がどちらも二次方程式

$$t^2-\gamma t+1=0$$

の二根となることを意味するから，

$$\zeta_m+\zeta_m^{-1}\in k \iff \zeta_m^{q}=\zeta_m \text{ 又は } \zeta_m^{q}=\zeta_m^{-1}$$

$$\iff q-1\equiv 0\ (m) \text{ 又は } q+1\equiv 0\,(m)$$

である。[redacted]すなわち $\zeta_m+\zeta_m^{-1}\in k \iff q\equiv\pm1\,(m)$ となる。又このとき自動的に q と m とは互いに素となる。よつて，$p\nmid |G|$ を考慮すれば定理の条件を得る。（証明終）

〔注意1〕［2］の定理1で述べている条件（k が G の表現体となるための）は，十分条件ではあっても必要条件とは限らぬものがある。例えば $G=\langle 2,2,m\rangle$ に対し，k が表現体なら，m が偶数のとき $\zeta_{2m}\in k$，m が奇数のとき $\zeta_{4m}\in k$ となるかの如く記されているが，上記から例えば $m=3$ の時，$\mathbb{F}_7$ は表現体だが $\zeta_4\notin\mathbb{F}_7$，従って $\zeta_{12}\notin\mathbb{F}_7$ となり反例となる。$m=4$ でも $\zeta_8\notin\mathbb{F}_7$ で，かつ $\mathbb{F}_7$ は表現体となる。また $G=\langle 2,3,3\rangle$ に対し，k が表現体なら $\zeta_4\in k$ であるかのように［2］にあるが，これも $k=\mathbb{F}_7$ という反例がある。（

定理4.5から，素数 $p>3$ に対し $\mathbb{F}_p$ はすべて $\langle 2,3,3\rangle$ の表現体である。）標数0の体でも反例が作れる。例えば $k=\mathbb{Q}(\zeta_3)$ では $\zeta_6+\zeta_6^{-1}=1\in k$, $1^2+(\sqrt{3}i)^2=-2$ だから，k は $\langle 2,3,3\rangle$ の表現体である（定理4.4）。しかし $\mathbb{Q}(\zeta_3)\not\ni\zeta_4$ である。$\langle 2,3,4\rangle$, $\langle 2,3,5\rangle$ についても［2］の表現体の条件は訂正の要がある。

［注意2］$\langle 2,3,3\rangle\cong SL(2,\mathbb{F}_3)$, $\langle 2,3,5\rangle\cong SL(2,\mathbb{F}_5)$ が成り立つ。基本関[redacted]係を満たす行列を，unipotent 行列の存在を考慮しつつ定理4.4と類似の方法で作り上げることにより，同型対応がつく。従って定理4.5により，

$$\begin{cases} \text{素数 } p>3 \text{ に対し} & SL(2,\mathbb{F}_3)\hookrightarrow SL(2,\mathbb{F}_p) \\ \text{素数 } p>5,\ p\equiv\pm1\ (5) \text{ に対し} & SL(2,\mathbb{F}_5)\hookrightarrow SL(2,\mathbb{F}_p) \end{cases}$$

なる包含関係の存在がわかる。これは興味深い現象のように思える。

§5. 表現グラフの決定

有限群 G が体 k を表現体にもつとする。半単純多元環 kG の単純成分への分解を $kG=\mathfrak{A}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{A}_n$ とし，単純環 $\mathfrak{A}_i$ を $\mathfrak{A}_i=M_{d_i}(E_i)$ の形に書く。すなわち $\mathfrak{A}_i$ は歪体 E_i 上の d 次の全行列環である。よって $\dim_k E_i=e_i$ とおくと

$$|G|=\sum_{i=1}^{n} d_i^2 e_i$$

となる。そしてGはk上にn個の非同値な既約表現をもつ。単純成分$\mathfrak{A}_i$に対応する既約表現を(ρ_i, V_i)とすると，$\rho_i(kG)\cong\mathfrak{A}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$である。$\dim_k V_i=\tilde{d}_i$とおくと，$V_i$は$kG$加群として$\mathfrak{A}_i\cong M_{d_i}(E_i)$の極小左イデアルに同型であるから，

$$\tilde{d}_i = d_i e_i \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

である。そして$E_i\cong \mathrm{End}_{kG}(V_i)$である。いま$G$の$k$上の2次の自己反傾的な忠実表現を$(\rho, V)$とする。$\rho\otimes\rho_j$を既約成分に分解して

$$\rho\otimes\rho_j=\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\,\rho_i \qquad (c_{ij}\in\mathbb{Z}_+)$$

とおく。非負整数c_{ij}はρ_iの$\rho\otimes\rho_j$中の重複度である。行列$C=(c_{ij})$をグラフ表示する：$\rho_1,\cdots,\rho_n$をn個の頂点とするグラフΓを考える。ただしΓの辺(edge)は次のように定める。

$c_{ii}>0$ なら $\rho_i\!\circlearrowleft$ c_{ii}本のloop

$i\neq j$，$c_{ij}=c_{ji}=0$ なら $\circ\rho_i$ と $\circ\rho_j$ は辺で結ばない。

$i\neq j$，$c_{ij}+c_{ji}>0$ なら $\overset{\rho_i}{\circ}\underset{(c_{ij},\,c_{ji})}{\rule{3em}{0.4pt}}\overset{\rho_j}{\circ}$ と書く。但し次の便法も用いることにする：

$c_{ij}=c_{ji}=1$ の時 $\overset{\rho_i}{\circ}\rule{3em}{0.4pt}\overset{\rho_j}{\circ}$

$c_{ij}>1$，$c_{ji}=1$ の時 $\rho_i\circ\underset{c_{ij}本}{\Longrightarrow}\circ\rho_j$

（[2]と若干表現グラフの定め方が違っている点に注意し

たい。)

<u>定理 5.1.</u> 行列 C が分解不能(各 i, j, $i \neq j$, に対して i_1, $i_2, \cdots, i_\nu$ が存在して $c_{ii_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_\nu j} \neq 0$ となる) $\Longleftrightarrow$ ρ が忠実表現

(証明)($\Longrightarrow$)は容易($\mathrm{Ker}\,\rho \subset \mathrm{Ker}\,\rho_i$ なる頂点 ρ_i 達は proper な連結成分中にあるから)。($\Longleftarrow$) は $k = \mathbb{C}$ の時と同様に, $\rho \otimes \cdots \otimes \rho$ 中にどの ρ_i も含まれることからわかる([3] 参照。)

<u>定理 5.2.</u> $e_i c_{ij} = e_j c_{ji}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$

(証明) 以下は [2] にある通りである。$\mathrm{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes_k V_j) \underset{k}{\cong} \mathrm{Hom}_{kG}(V_i, \underbrace{V_i \oplus \cdots \oplus V_i}_{c_{ij}\text{個}}) \underset{k}{\cong} \underbrace{E_i \oplus \cdots \oplus E_i}_{c_{ij}\text{個}}$ であるから, $\dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes_k V_j) = e_i c_{ij}$ である。さて, $\mathrm{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes V_j)$ は k 上のベクトル空間としては, $V_i^* \otimes V \otimes V_j$ (V_i^* は V_i の dual space) なる kG 加群中の G 不動点の全体のなす部分空間 $(V_i^* \otimes V \otimes V_j)^G$ に同型である:

$$\mathrm{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes V_j) \underset{k}{\cong} (V_i^* \otimes V \otimes V_j)^G$$

所が表現の完全可約性により, 上式右辺は, $(\cdots\cdots)$ を dual space でおきかえても $\underset{k}{\cong}$ となる:

$$(V_i^* \otimes V \otimes V_j)^G \underset{k}{\cong} (V_i \otimes V^* \otimes V_j^*)^G$$

ここへ ρ の自己反傾性 $V \cong_{kG} V^*$ を用いれば，右辺は $\cong_k$ $\mathrm{Hom}_{kG}(V_j, V \otimes V_i)$ となる。よって $\mathrm{Hom}_{kG}(V_i, V \otimes V_j)$ は k 上のベクトル空間としては i と j を交換したものと同型である。よって次元を比べて証明が完了する。(証明終)

行列 C の分解不能性により，C に Perron-Frobenius の非負行列論（例えば [6] 参照）が適用できる。$\rho \otimes \rho_j = \sum c_{ij} \rho_i$ の k 上の次数を比べて

$$2\hat{\mathfrak{d}} = \hat{\mathfrak{d}} C$$

を得る。但し $\hat{\mathfrak{d}} = (\hat{d}_1, \cdots, \hat{d}_n) > 0$. よって C の Frobenius 根は 2 である。$\hat{\mathfrak{d}}$ は固有値 2 に属する固有ベクトルとして，次の性質で特徴づけられる。

$$\begin{cases} \hat{\mathfrak{d}} \text{ の成分はすべて自然数} \\ \hat{\mathfrak{d}} \text{ の或る成分は } = 1 \end{cases}$$

次に $2\hat{d}_j = \sum_i \hat{d}_i c_{ij}$ に，$\hat{d}_j = e_j d_j$，$\hat{d}_i = e_i d_i$ を代入して定理 5.2 を用いれば

$$2\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\,{}^tC$$

を得る。但し $\mathfrak{d} = (d_1, \cdots, d_n) > 0$。$\mathfrak{d}$ は ${}^tC$ の固有値 2 に属する固有ベクトルであって，次の性質で特徴づけられるものである：

$$\begin{cases} \mathfrak{d} \text{ の成分はすべて自然数} \\ \mathfrak{d} \text{ の或る成分は } = 1 \end{cases}$$

以上から次のことがわかった：

<u>定理 5.3.</u> 体kが有限群Gの表現体で，ρがk上のGの2次の自己反傾的な忠実表現とする。組(G, k, ρ)の定めるn次行列C（又は表現グラフ）は次の性質をもつ。

(α) Cの成分c_{ij}はすべて非負整数である。

(β) $c_{ij} > 0 \Longleftrightarrow c_{ji} > 0$

(γ) Cは分解不能，かつCのFrobenius根$= 2$

(δ) 自然数を成分とする行ベクトル

$$\tilde{\mathfrak{d}} = (\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n), \quad \mathfrak{d} = (d_1, \cdots, d_n)$$

が存在して次を満たす：

$$\begin{cases} 2\tilde{\mathfrak{d}} = \tilde{\mathfrak{d}} C, \quad 2\mathfrak{d} = \mathfrak{d} C \\ \mathrm{Min}\{\tilde{d}_1, \cdots, \tilde{d}_n\} = \mathrm{Min}\{d_1, \cdots, d_n\} = 1 \end{cases}$$

（かかる$\tilde{\mathfrak{d}}, \mathfrak{d}$が一意的なことは($\gamma$)からわかる。）

(ε) $d_i | \tilde{d}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$が成り立つ。

<u>定義</u> 定理5.3の(α), (β), (γ)を満たす行列C（又はそのグラフ）を<u>一般ユークリッド型</u>であるという。さらに

$$c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{nn} = 0$$

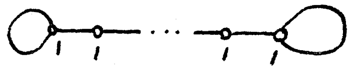
をも満たすC（又はそのグラフ）を<u>ユークリッド型</u>であるという。

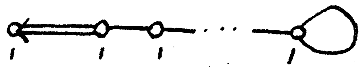
ユークリッド型の行列の分類はよく知られている（例えば[3]参照）。よってユークリッド型ではないような一般ユ

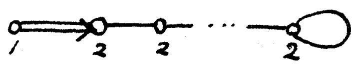
ークリッド型の行列の分類を述べよう。（以下[2]の結果を別の方法で導びく。）

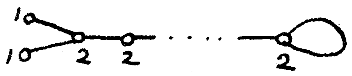
<u>定理 5.4</u>. 一般ユークリッド型だがユークリッド型でない行列（又はグラフ）は次で与えられる。

$\tilde{L}_0^*$: 

$\tilde{L}_\ell$:  （頂点数＝添字数＋1）

$\widetilde{BL}_\ell$: 

$\widetilde{CL}_\ell$: 

$\widetilde{DL}_\ell$: 

（証明）[6] にいう正量記入法により，上の各グラフのFrobenius根が2であることが確かめられる。（各頂点に正の実数値を適当に記入して，その2倍が隣接頂点に記入された量の，線分の重複度を考慮に入れた和に等しくなるようにすることをFrobenius根2に対する正量記入法という。ループは自己隣接と見做すのである。）正量 $\tilde{\alpha}$ が上図に記入してある。よって上図はすべて一般ユークリッド型である。しかしどれにもループがあるから，$\exists c_{ii} > 0$ となり，どれもユークリッド型ではない。

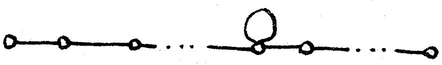
よって，ループをもつ一般ユークリッド型のグラフが上図のどれかと一致することを示せばよい。一般にグラフから頂点や何本かの辺を取り除くとFrobenius根は減小するとい

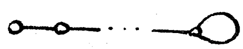
う性質がある(証明は[6]参照)。よって上図5個の何れかを真に含むグラフのFrobenius根は >2 であり，5個の何れかに真に含まれるグラフのFrobenius根は <2 である。よってそれらは何れも一般ユークリッド型ではない。さて場合をわけて考えよう。

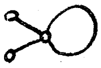
(イ) $\exists c_{ii} \geqq 2$ の時。グラフは $\tilde{L}_0^*$ を含むから $\tilde{L}_0^*$ になる。

(ロ) $\forall c_{ii} \leqq 1$ の時。ループの個数が $\geqq 2$ ならグラフの連結性により，グラフは $\tilde{L}_\ell$ を含む．よって $\tilde{L}_\ell$ に一致する。

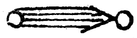
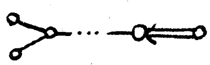
(ハ) $\forall c_{ii} \leqq 1$ かつループの個数が $=1$ の時。$m = \underset{i \neq j}{\mathrm{Max}}\, c_{ij}$ とおく。もし $m \geqq 3$ ならグラフの連結性により $B\tilde{L}_\ell$ 又は $C\tilde{L}_\ell$ が真に含まれ矛盾。$\therefore m \leqq 2$. $m=2$ ならば，やはり $B\tilde{L}_\ell$ か $C\tilde{L}_\ell$ を含むからどちらかと一致する。よって $m=1$ とする。グラフが分岐点(ループ以外の)をもてば，再びグラフの連結性により $D\tilde{L}_\ell$ を含むから $D\tilde{L}_\ell$ 型となる。もしグラフに分岐点がないなら，グラフは次の何れかである。

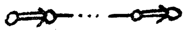
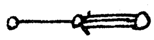


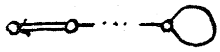


前者は $D\tilde{L}_2$:  を含むから実は $D\tilde{L}_2$ に一致する。後者は $\tilde{L}_\ell$ に真に含まれるからFrobenius根は <2 (証明終)

さて一般ユークリッド型の行列 C は定理5.3の(δ)を満たすことが験証される。(ε)の験証をしてみると次のグラフが失格することがわかる。

$\widetilde{A}_{1,2}$  , $\widetilde{C}_{\ell,2}$  , $\widetilde{B}_{\ell,2}$ 

$\widetilde{BC}_{\ell}$  , $\widetilde{F}_{4,2}$  , $\widetilde{G}_{2,3}$ 

$\widetilde{BL}_{\ell}$ 

（転置行列に対応するグラフは重線の向きを反対にして得られることに注意すれば験証は容易である。）

残留したグラフについて，$\tilde{d}_i$, d_i, $e_i = \tilde{d}_i/d_i$ を書き上げて見ると恒に $e_i \leqq 3$ がわかる。よって

定理　5.5　体kが有限群Gの表現体ならば，群環kGの単純成分 $\mathfrak{A}_i = M_{d_i}(E_i)$ は $\dim_k E_i \leqq 3$ を満たす。従って歪体E_iは皆可換体である。（実は後で $\forall \dim_k E_i \leqq 2$ を示す。）

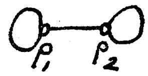
系．G'をGの交換子群とすれば $[G : G'] = \sum_{d_i=1} e_i$ ．従ってGがアーベル群 $\Leftrightarrow \forall d_i = 1$．

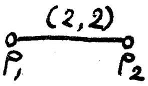
（証明）G/G'のk上の既約表現は，Gの既約表現 ρ_i のうちで，$\operatorname{Ker}\rho_i \supset G'$ なるものとして特徴づけられる。そのとき $\rho_i(k[G/G']) = \rho_i(kG) \cong \mathfrak{A}_i \cong M_{d_i}(E_i)$ である。よって

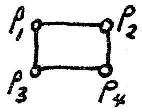
$\operatorname{Ker}\rho_i \supset G' \Leftrightarrow \rho_i(G)$ が可換群 $\Leftrightarrow \rho_i(kG) \cong M_{d_i}(E_i)$ が可換環 $\Leftrightarrow d_i = 1$（E_iが可換体だから）。よって $k[G/G'] \cong \bigoplus_{d_i=1} \mathfrak{A}_i$ 　$\therefore$ $[G : G'] = \sum_{d_i=1} \dim_k E_i = \sum_{d_i=1} e_i$ （証明終）

§6．アーベル群の場合

定理3.1により表現体 k をもつ有限アーベル群Gは

$G=\mathbb{Z}_n$ 又は $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ である。$G=\mathbb{Z}_1$ なら体k上の2次の自己反傾的な忠実表現ρ—以下かかるρを簡単のためGの実現ということにする—は $\rho=1_G\oplus 1_G$ (1_GはGの単位表現となり，Gの表現グラフは $\tilde{L}_0^*$:  となる。$G=\mathbb{Z}_2=\langle\sigma\rangle$ なら，Gのk上の既約表現は $\rho_1=1_G$, $\rho_2=\varepsilon$ ($\varepsilon(\sigma)=-1$)で，Gの実現ρは $\rho=\rho_1\oplus\rho_2$ 又は $\rho=2\rho_2$ である。夫々に応じてGの表現グラフは $\tilde{L}_1$: 

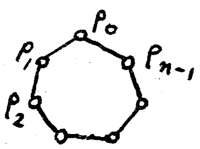
か 

となる。$G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ ならGの実現は本質的には一通りで，表現グラフは必らず $\tilde{A}_3$: 

となることは容易にわかる。$G=\mathbb{Z}_n=\langle\sigma\rangle$, $n\geqslant 3$ とする。Gの実現ρをとり，行列$\rho(\sigma)$の固有値をα,βとすれば，α,βは1の原始n乗根であるが，ρの自己反傾性により $\alpha\beta=1$ となる．いま $\alpha=\theta=\zeta_n$, $\beta=\theta^{-1}$ とおき，場合をわけて考える。

(イ) $\theta\in k$の時.

Gのk上の既約表現は ρ_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, $\rho_i(\sigma)=\theta^i$, $\rho_1=\rho$ で与えられる. $\rho\otimes\rho_j=\rho_{j+1}\oplus\rho_{j-1}$ ($\rho_n=\rho_0$ とする)だから表現グラフは

$\tilde{A}_{n-1}$ 

となる。

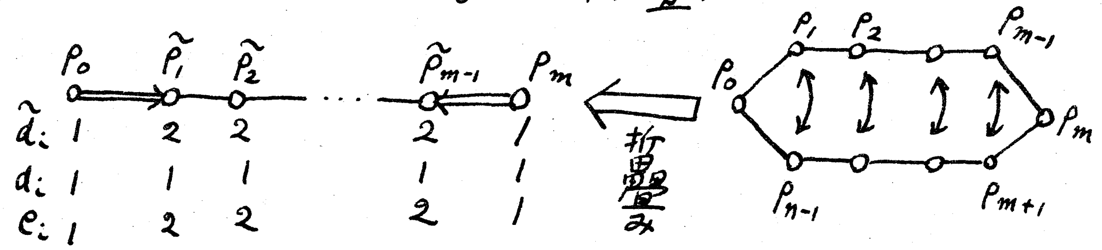
(ロ) $\theta\notin k$, $n=$偶数$=2m$ の時.

上の(イ)の表現 ρ_j と ρ_{n-j} とを一緒にして折り畳んでみ

る。即ち直和 $\rho_j \oplus \rho_{n-j}$ を作り，之を $=\tilde{\rho}_j$ $(1 \leq j \leq m-1)$ とおくと，Gの k 上の2次既約表現 $\tilde{\rho}_1, \cdots, \tilde{\rho}_{m-1}$ が生ずる。($\theta + \theta^{-1} \in k$ 故，$\theta^i + \theta^{-i} \in k$ がわかる．$\tilde{\rho}_i(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \theta^i + \theta^{-i} \end{pmatrix}$ で $\tilde{\rho}_i$ が作れるから，$\tilde{\rho}_i$ は k 上の表現で，$k(\theta)$ 上では $\rho_j \oplus \rho_{m-j}$ と同値となる。）$\tilde{\rho}_1, \cdots, \tilde{\rho}_{m-1}$ が互いに同値でないことは，

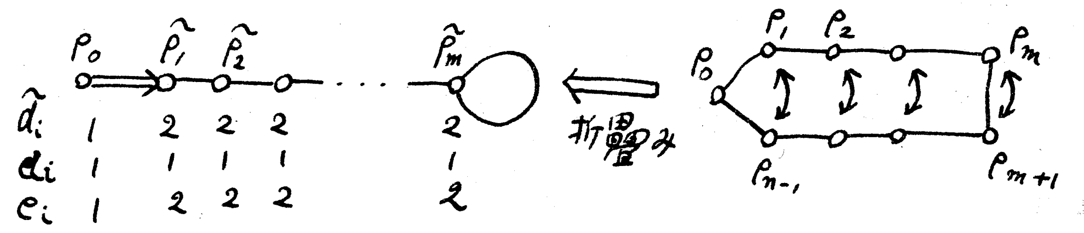
$$1 \leq i < j \leq m-1 \Rightarrow \theta^i + \theta^{-i} \neq \theta^j + \theta^{-j}$$

からわかる。これに(イ)の ρ_0, ρ_m を加えると，次数の計算により，Gの k 上の既約表現の完全代表系 $\rho_0, \rho_m, \tilde{\rho}_1, \cdots, \tilde{\rho}_{m-1}$ が得られたことがわかる。あとは簡単な計算で表現グラフが得られる。それは(イ)の場合の折り畳みである。



(ハ) $\theta \notin k$, $n = $ 奇数 $= 2m+1$ の時。

上の(ロ)と同様に，(イ)の折畳み $\tilde{\rho}_j = \rho_j \oplus \rho_{n-j}$ $(1 \leq j \leq m)$ と ρ_0 とで k 上の凡ての既約表現が得られ，表現グラフは



となる。

すると残留グラフのうち $\forall d_i = 1$ である $\tilde{L}_\ell$ は $\ell \geq 2$ なら

ば表現グラフとしては失格することがわかる。

§7. $G=\mathcal{D}_{2n}=(2,2,n)$ $(n\geqq 3)$ の場合。

(イ) $n=$偶数$=2m$ の時。

$G=\langle P,Q,R \mid P^2=Q^2=R^n=PQR=1\rangle=\langle Q,R \mid Q^2=R^n=1,$ $QRQ^{-1}=R^{-1}\rangle$ より，G の1次表現は次の4つの χ_i $(1\leqq i\leqq 4)$ である。

	Q	R
χ_1	1	1
χ_2	-1	1
χ_3	1	-1
χ_4	-1	-1

$m-1$ 個の G の表現体 k 上の表現 ρ_j を

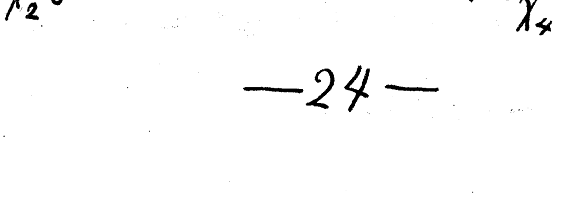
$$\rho_j(Q)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \rho_j(R)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\theta^j+\theta^{-j}\end{pmatrix}\quad(1\leqq j\leqq m-1)$$

で定義する。ただし，$\theta=\zeta_n$ 。（基本関係の保存の検証は容易である。）すると次の諸点が検証できる：

1. $\rho_1,\cdots,\rho_{m-1}$ は絶対既約，かつ互いに非同値

2. $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\rho_1,\cdots,\rho_{m-1}$ が G の全既約表現をなす

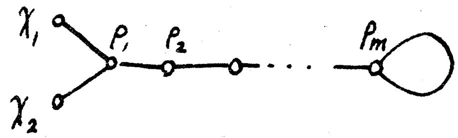
これより，実現としては $\rho=\rho_1$ をとったとしてよいから，表現グラフは次の通り。



$\forall e_i=1$（∵絶対既約性より）

（ロ） n = 奇数 = $2m+1$ の時。

G の 1次表現は上の記号で χ_1, χ_2 のみ。$\rho_1, \cdots, \rho_m$ が絶対既約な2次表現で，かつ互いに非同値となることが検証される。そして $\chi_1, \chi_2, \rho_1, \cdots, \rho_m$ が全既約表現をなす。表現グラフは



$\forall e_i = 1$

§8. $G = \langle 2, 2, n \rangle$ $(n \geqq 2)$ の場合。

(イ) n = 偶数 = $2m$ の場合。

$G = \langle P, Q, R \mid P^2 = Q^2 = R^n = PQR \rangle = \langle Q, R \mid Q^2 = R^n,\ QRQ^{-1} = R^{-1} \rangle$

より，G の 1次表現は次の4つの χ_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ である。

	Q	R
χ_1	1	1
χ_2	-1	1
χ_3	1	-1
χ_4	-1	-1

$\theta = \zeta_{2n}$，S[redacted]$= \theta + \theta^{-1}$，S_j[redacted]$= \theta^j + \theta^{-j}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ とおく．G の表現体 k は S[redacted]$\in k$ を満たす（∵定理4.3）。G の実現 ρ が

$$\rho(Q) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \rho(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

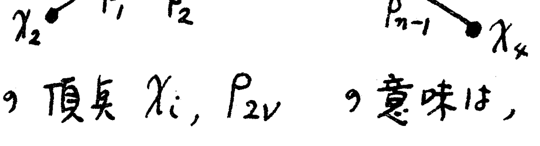
であるとしてよい．すると $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$，$\alpha + \delta = 0$ と基本関係とから

$$(\star) \qquad \alpha^2 + s\alpha\gamma + \gamma^2 = -1$$

を得る。すると各 j に対し，$x, y \in k$ が存在して

$$(*) \qquad x^2 + s_j xy + y^2 = (-1)^j$$

となる。実際もし $\theta \in k$ なら $x = \theta^{mj}$, $y = 0$ とおけばよい。もし $\theta \notin k$ なら，$k(\theta)/k$ は2次ガロア拡大で，ガロア群は $\{1, \varphi\}$，$\varphi(\theta) = \theta^{-1}$ となる（$\because S \in k$）。そして $1 \leq j \leq n-1 \Rightarrow \theta^j \notin k$（もし $\theta^j \in k$ なら $\varphi(\theta^j) = \theta^j$ $\therefore \theta^{2j} = 1$ $\therefore$ $2n \mid 2j$ $\therefore$ $n \leq j$）。よって $k(\theta) = k(\theta^j)$（$=K$ とおく）。ノルム写像 $K \to k$ を N と書くと，$(*)$ は $(-1)^j \in N(K)$ を意味する．一方 (☆) より $-1 \in N(K)$．よって $(*)$ の解 $x, y \in k$ の存在がわかる。すると適当な $a_j, b_j, c_j, d_j \in k$ が存在して，[redacted] $\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} = \rho_j(Q)$，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s_j \end{pmatrix} = \rho_j(R)$ が Q, R 間の基本関係を満たすことがわかる。(☆を得たのと逆の計算を辿ればよい。）かくして G の表現 $\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$ を得るが，これらが k 上の絶対既約表現となり，かつ互いに非同値であることが検証される。そして $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$ が G の全既約表現を与え，表現グラフは次の通り： $\rho = \rho_1$



$\forall$ [redacted] $e_i = 1$

黒丸の頂点 χ_i, $\rho_{2\nu}$ の意味は，これらの表現は実は G の商群 $G/\langle z \rangle = (2, 2, n) = \mathcal{D}_{2n}$ $(z = PQR)$ の表現をひきおこしている意である。

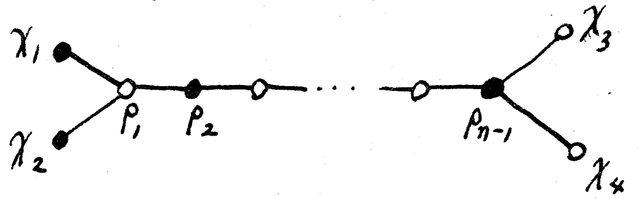
(ロ) n = 奇数 = $2m+1$, $\zeta_4 \in k$ の場合。

G は次の4個の1次表現 $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ をもつ。

	Q	R
χ_1	1	1
χ_2	-1	1
χ_3	i	-1
χ_4	$-i$	-1

($i = \zeta_4$ とおく)

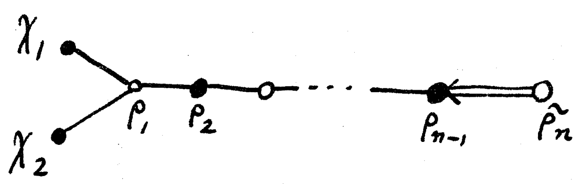
すると2次の絶対既約表現 $\rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$ を(イ)と同様に定めて次の表現グラフを得る:



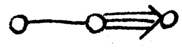
● は $(2,2,n)$ の表現をひきおこす意.

(ハ) n = 奇数 = $2m+1$, $\zeta_4 \notin k$ の場合。

G の1次表現は χ_1, χ_2 のみである。(ロ)の χ_3 と χ_4 とを折り疊んで $\tilde{\rho}_n = \chi_1 \oplus \chi_2$ を作ると, $\zeta_4 + \zeta_4^{-1} = 0 \in k$ 故 $\tilde{\rho}_n$ は G の k 上の2次既約表現で, 次の表現グラフを得る:



($\tilde{\rho}_n$ のみ $e_i = 2$
他の e_i はすべて1)

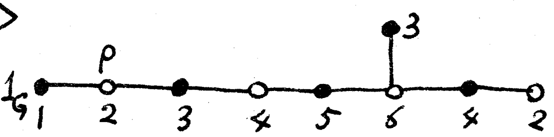
以上の結果から, $\tilde{G}_{2,1}$  は表現グラフとしては失格することがわかる。何故なら,これを表現グラフにもつ群 G は $|G| = 8$, $[G:G'] = 4$ となる筈(定理5.5, 系)

で，従って $G=\langle 2,2,2\rangle$ 又は $G=(2,2,4)$ である。しかしこれらの表現グラフは上述の通りで，$\tilde{\hat{G}}_{2,1}$ 型ではない。また $\tilde{\hat{G}}_{2,1}$ の時のみ $e_i=3$ が現われるから，定理5.5中の主張 $\dim_k E_i \leqq 2$ が恒に成り立つこともわかる。

§9. $G=\langle 2,3,n\rangle$ $(3\leqq n\leqq 5)$ の場合。

これらの群は，体 k $(\mathrm{char}\, k \nmid |G|)$ の代数的閉包 $\bar{k}$ 上で次数 >2 の既約表現をもつことが知られている。($k=\mathbb{C}$ の場合と同様である。) よって，k 上の既約表現の次数の最大値は >2 となる。(k 上の既約表現は $\bar{k}$ で分解し得るから。) 一方，§3と上述により，$\mathrm{Max}\,\tilde{d}_j>2$ なる一般ユークリッド型のグラフは $\tilde{F}_{4,1}$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ のみが残留している。$|G|$ を比べて $\langle 2,3,3\rangle$ の表現グラフは $\tilde{F}_{4,1}$, $\tilde{E}_6$; $\langle 2,3,4\rangle$ の表現グラフは $\tilde{E}_7$; $\langle 2,3,5\rangle$ の表現グラフは $\tilde{E}_8$ とならざるを得ない。従って

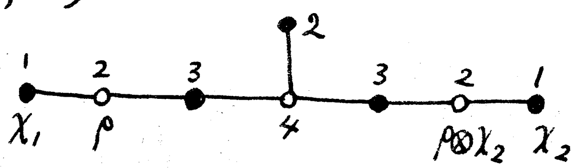
$\langle 2,3,5\rangle$



($\forall e_i=1$ 数字は $\tilde{d}_i=d_i$ を示す)

• は商群 $(2,3,5)\cong\mathfrak{A}_5$ の既約表現の意。

$\langle 2,3,4\rangle$



($\forall e_i=1$ 数字は $\tilde{d}_i=d_i$ を示す)

● は商群 $(2, 3, 4) \cong \mathfrak{S}_4$ の既約表現の意である。また χ_1, χ_2 は次の1次表現である。

	P	Q	R
χ_1	1	1	1
χ_2	-1	1	-1

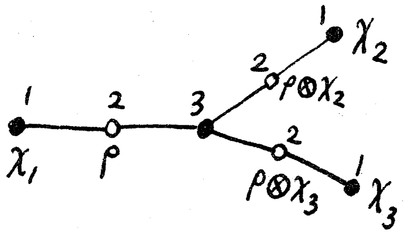
$\langle 2, 3, 3 \rangle$：これは次の二つの場合にわかれる：

(イ) $\omega = \zeta_3 \in k$ の場合.

$G = \langle 2, 3, 3 \rangle$ は次の3個の1次表現をもつ。

	P	Q	R
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

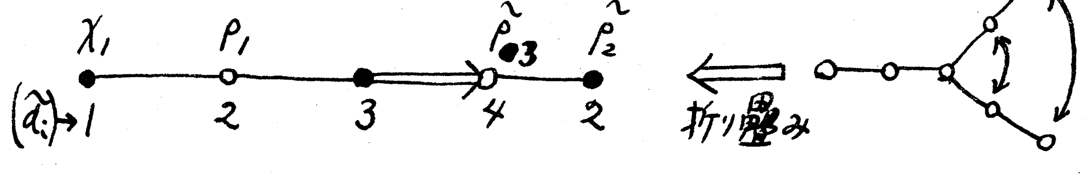
すると表現グラフは次の如く $\tilde{E}_6$ 型にならざるを得ない。



$\left(\forall e_i = 1\text{；数字は } \tilde{d}_i = d_i \text{ を示す。● は商群 } (2, 3, 3) = \mathfrak{A}_4 \text{ の既約表現の意.}\right)$

(ロ) $\omega = \zeta_3 \notin k$ の場合.

折り畳み $\chi_2 \oplus \chi_3 = \tilde{\rho}_2$, $(\rho\otimes\chi_2)\oplus(\rho\otimes\chi_3) = \tilde{\rho}_3$ が k 上の既約表[redacted]現として登場し，表現グラフは $\tilde{E}_6$ たり得ず $\tilde{F}_{4,1}$ 型になる。



参考文献

[1] D. Ford - J. McKay : Representations and Coxeter Graphs, preprint 1979 ; 尚 J. McKay : Affine Diagrams and character tables, 1979 (Santa Cruz 報告) もある。

[2] D. Happel - U. Preiser - C. M. Ringel, Binary polyhedral groups and Euclidean diagrams, preprint, 1979

[3] 岩堀長慶 : McKay Observation について, 群論六甲シンポジューム報告集, 1980, 三月

[4] H.S.M. Coxeter - W.O.J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Springer, 2nd ed. 1965

[5] N. Iwahori, On a property of a finite group, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 11, 47-64, 1964

[6] 岩堀長慶 : 線型不等式とその応用 (岩波講座・基礎数学) 第6章

<u>付記</u> : F. Klein の本 : The icosahedron and the solution of equations of the fifth degree (2nd ed. Dover, New York 1956) の52頁, 下から12行目のあたりに, binary polyhedral group の相対不変式 F_1, F_2, F_3 について, $F_1^{\nu_1}, F_2^{\nu_2}, F_3^{\nu_3}$ は同じ weight をもつことが Case by Case の計算でわかる— と書いているが, 上述の1次表現の表から直ぐ験証され, $\langle 2,3,n\rangle$, $\langle 2,2,2m\rangle$ なら $F_i^{\nu_i}$ = 絶対不変式 — となる。